16 gennaio 2017

Primo Incontro

POLITECNICO DI MILANO

I numeri

Incontri con allievi del Liceo Classico

Luisa Rossi Costa

Un poco di storia

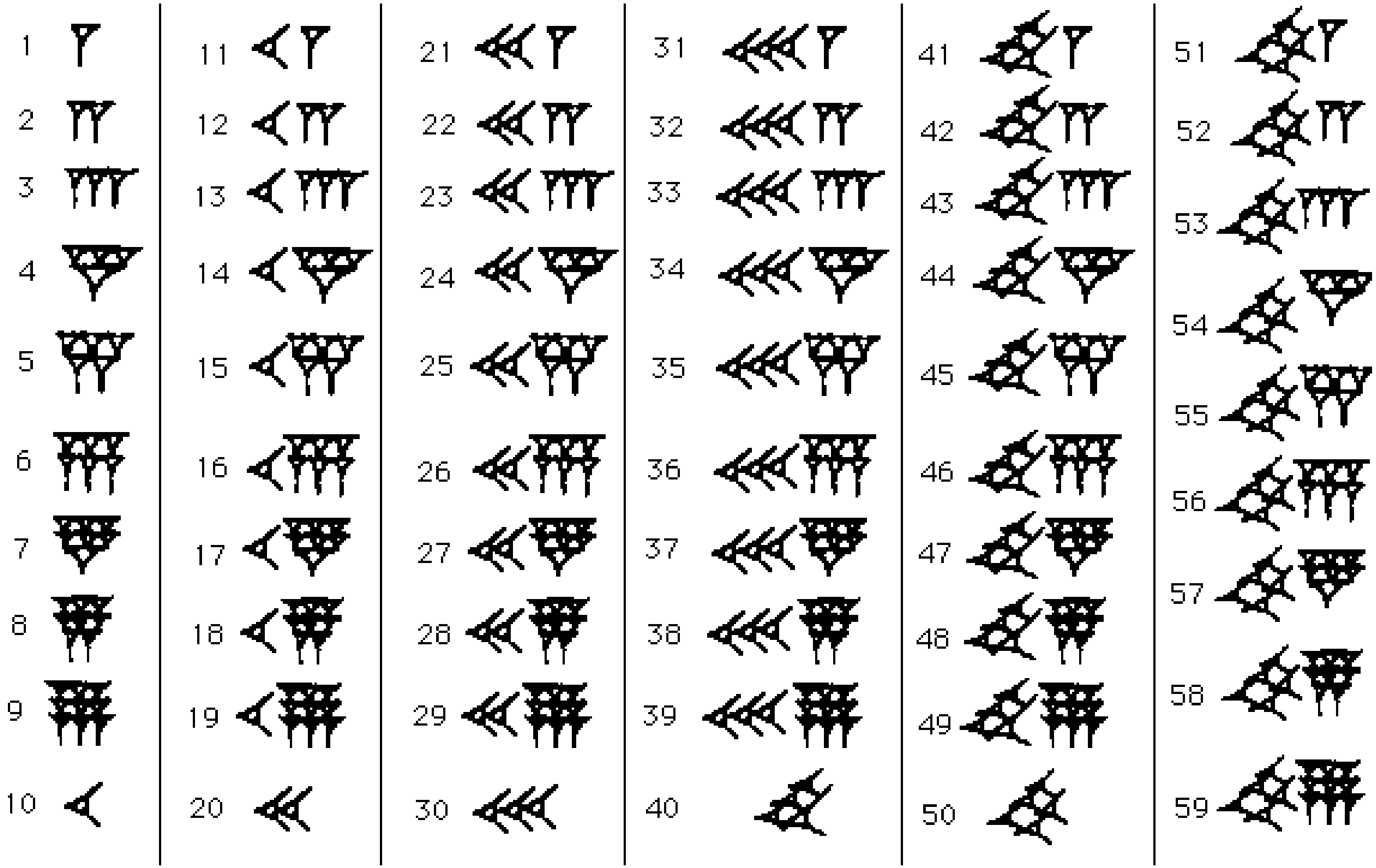
Caldei: ciclo lunare di 30 giorni; 12 lune in un anno, sole che sorge e tramonta in punti diversi dell'orizzonte, ma il ciclo si ripete circa ogni 360 giorni => anno. …numerazione in base 60 o 30

Numerazione celtica: a base 20, rimasta nella lingua francese in alcuni numeri

Romani: base decimale, intuibile anche nei relativi simboli

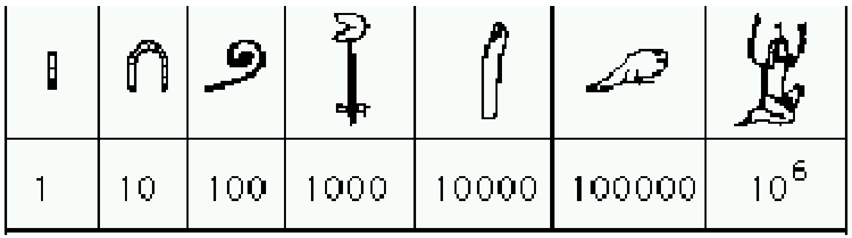
Quasi nessuno aveva un simbolo per lo **zero**

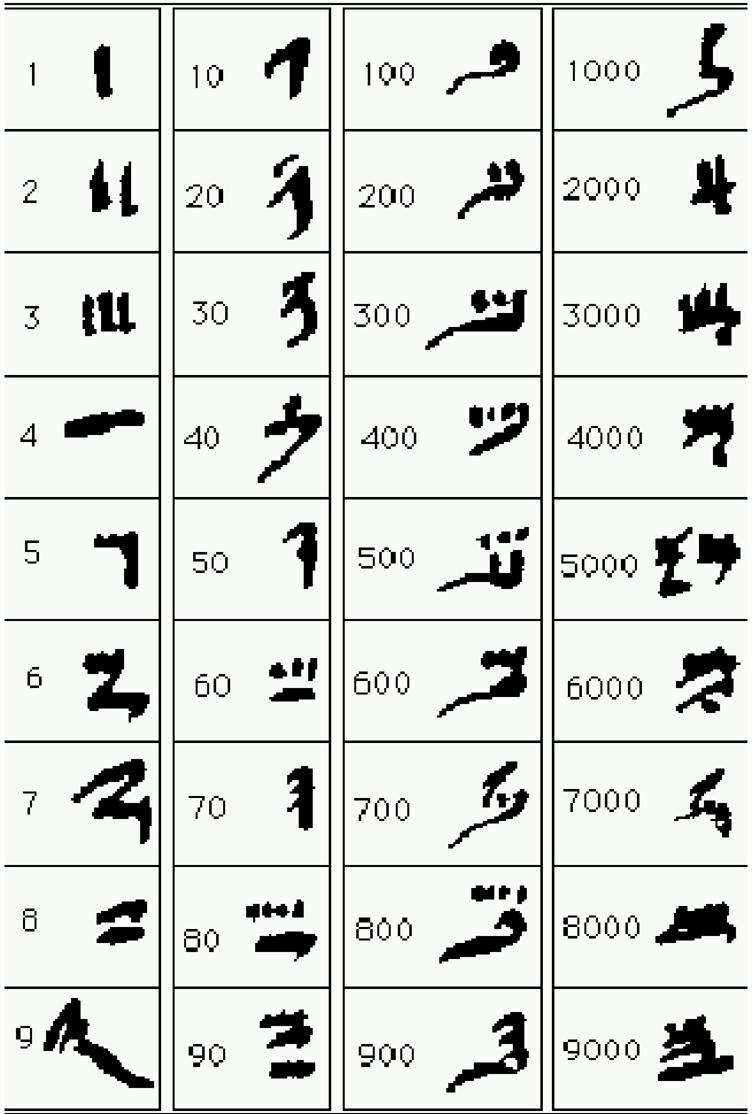
Numeri nella storia: assiro-babilonesi



Numeri nella storia: Egitto

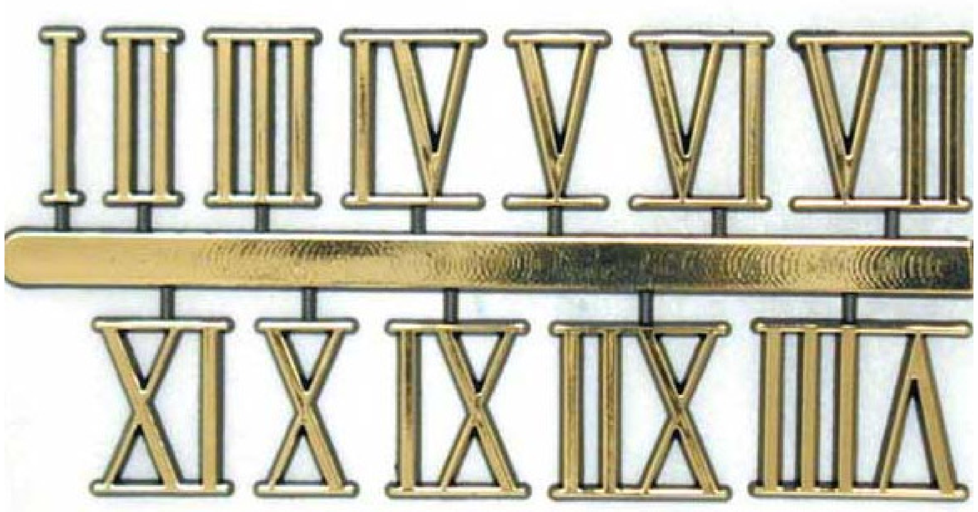
1		*wa*	10		*mD*
2		*sn*	20		*Dwt*
3		*xmt*	30		*mabA*
4		*fdn*	40		*Hmw*
5		*dj*	100		*Sn.t*
6		*sjs*	1000		*xA*
7		*sfx*	10,000		*Dba*
8		*xmn*	100,000		*Hfn*
9		*psD*	1,000,000		*HH*

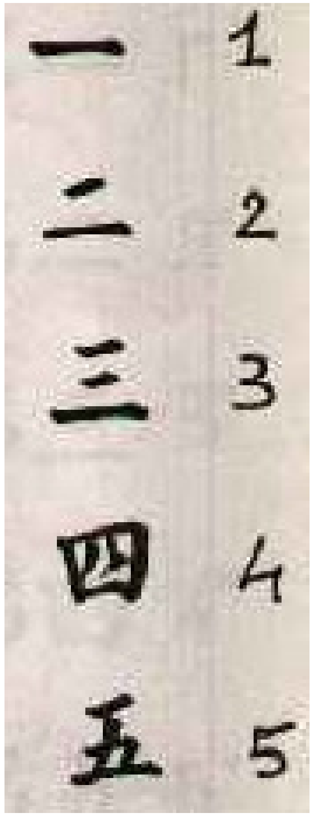


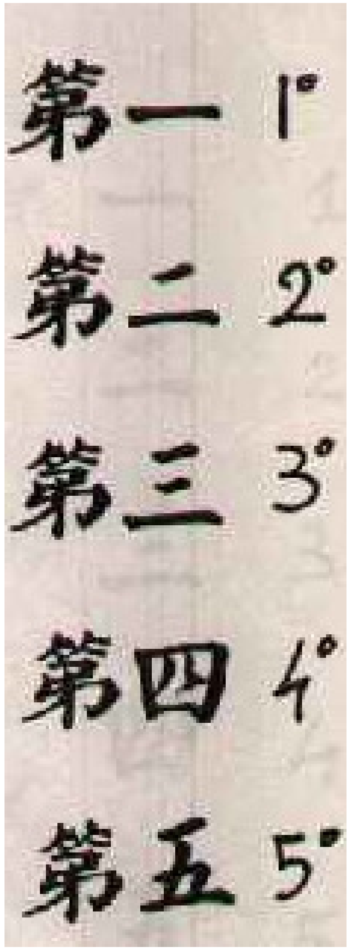


Numeri romani e cinesi

Nella numerazione romana sembra evidente il legame con le dita delle mani







Numeri arabi

Originale	Nome del numerale	Equivalente
٠	ṣifr	0
١	wāḥad	1
٢	iṯnīn	2
٣	ṯalāṯa	3
٤	arbaᶜa	4
٥	ḫamsa	5
٦	sitta	6
٧	sabᶜa	7
٨	ṯamānya	8
٩	tisᶜa	9
١٠	ᶜašra	10

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
صفر	واحد	إثنان	ثلاثة	أربعة	خمسة	ستة	سبعة	ثمانية	تسعة	عشرة
ṣifr	wāḥid	iṯnān	ṯalāṯah	ʼarbaʻah	ḫamsah	sittah	sabʻah	ṯamāniyyah	tisʻah	ʻašarah
صفر	واحد	جوج	تلاتة	ربعة	خمسة	ستة	سبعة	تمنية	تسعود	عشرة
sifr	wahed	žuž	tlata	rebʻa	hemsa	setta	sebʻa	tmenya	tesʻūd	ʻašara

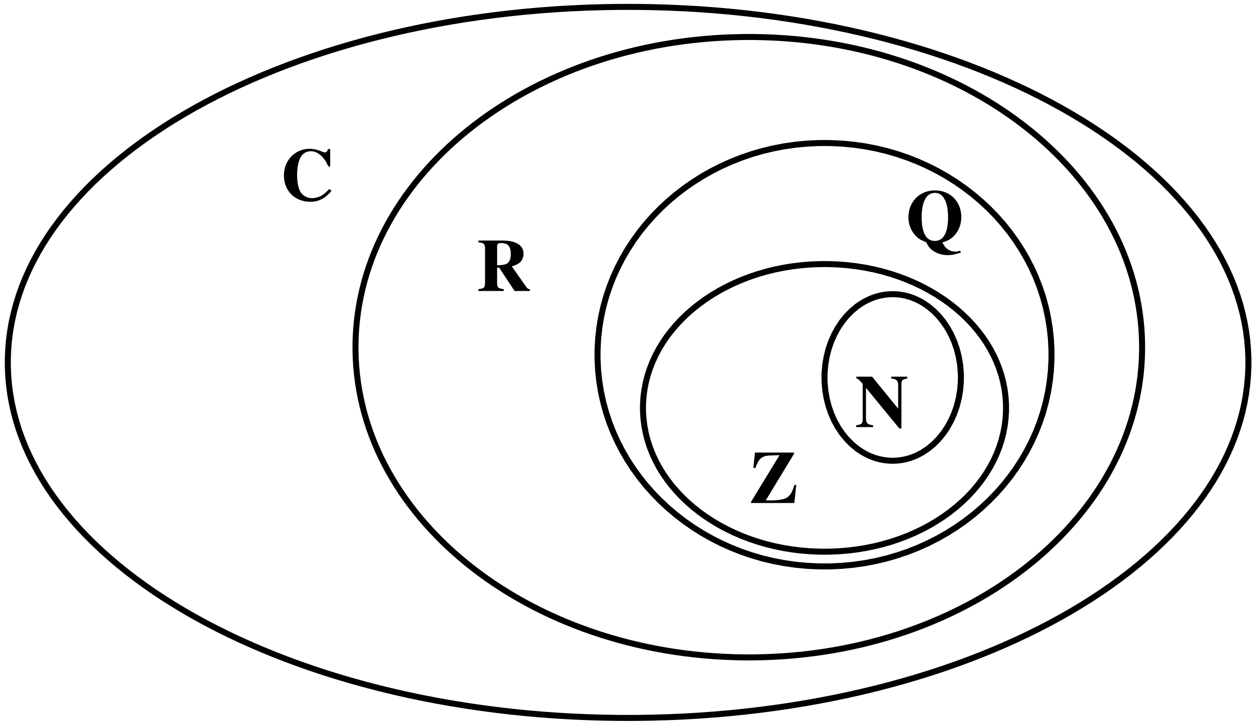
Gli insiemi numerici con i quali lavoriamo

- **N** numeri interi naturali
- **Z** numeri interi relativi
- **Q** numeri razionali
- **R** numeri reali
- **C** numeri complessi

Ogni insieme numerico successivo ad N include il precedente ed è un suo *ampliamento*

Inclusioni

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$



$$\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}^+$$

I protagonisti dell'assiomatizzazione dei numeri naturali

Giuseppe Peano
1858 - 1932

Bertrand Russel
1872 - 1970

I cinque assiomi di Peano

Idee primitive fondamentali: zero, numero, successivo

1. 0 è un numero naturale
2. ogni numero naturale n ha un unico successivo n^+
3. 0 non è successivo di alcun numero naturale
4. numeri naturali diversi hanno successivi diversi
5. se 0 appartiene ad un insieme **M**, e ogni elemento di **M** ha in **M** il successivo, allora **M coincide con N**

Il principio di induzione

- Sul quinto assioma è basato il **principio di induzione**:

Sia P(n) un predicato riguardante il numero naturale n,

se

1. P(0) è vero
2. per ogni k in N, da P(k) segue P(k+1)

allora il predicato P(n) è **vero per ogni numero naturale** n

Esempi

Applicazioni del Principio di induzione:

1 Somma di primi n interi naturali

2 Somma dei termini di una progressione geometrica

3 Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

4 Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

Potenza di un insieme H

Georg Cantor
1845 – 1918

L'insieme **H ha cardinalità n** quando gli elementi di H si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i primi n interi naturali

L'insieme è costituito da **un numero finito di elementi** se esiste un n per il quale si può realizzare tale corrispondenza. Diversamente l'insieme è **infinito**

Quando **due insiemi H e K, finiti o infiniti si possono mettere in corrispondenza biunivoca,** si dicono di **eguale potenza** o **equipotenti**

Numerabilità di un insieme H

Può succedere che per l'insieme H non si trovi un numero naturale n con il quale poter realizzare una corrispondenza biunivoca con i primi **n interi**.

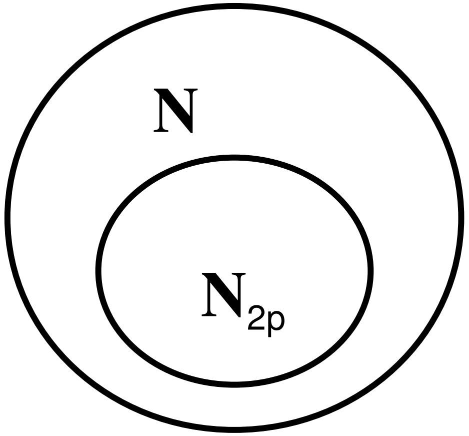
Se si riuscisse però ad ordinare ugualmente l'insieme, con un opportuno criterio, in modo che ogni elemento possa essere legato ad uno e un solo numero intero naturale e viceversa, allora l'**insieme** sarebbe **infinito numerabile**

Quali esempi di infinito numerabile?

Bisogna riflettere …

I numeri interi pari $\mathbf{N}_{2p}$ o i numeri interi $\mathbf{N}_{2p+1}$, p=0,1,2,3,   (cioè $p \in \mathbf{N}$),

Sono sicuramente un sottoinsieme proprio di $\mathbf{N}$!



$\mathbf{N}_{2p}$ e $\mathbf{N}_{2p+1}$ sono insiemi disgiunti e

$\mathbf{N}_{2p} \cup \mathbf{N}_{2p+1} = \mathbf{N}$

Ma ecco una proposta di **corrispondenza** biunivoca con **N**

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	. . . . .
$\mathbf{N}_{2p}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	. . . . .
$\mathbf{N}_{2p+1}$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	. . . . .

Insiemi numerabili

Possiamo concludere che $\mathbf{N}_{2p}$ e $\mathbf{N}_{2p+1}$ sono **infiniti numerabili**, cioè hanno la **stessa potenza di N**, pur essendo sottoinsiemi propri di **N.**

Si possono aggiungere molti altri esempi: **tutti i multipli** di un fissato **intero p** costituiscono insiemi numerabili:

0 1**p** 2**p** 3**p** 4**p** 5**p** 6**p** 7**p** . . . . .

e costituiscono ancora un sottoinsieme proprio di **N**

… ci bastano gli interi naturali?

Le **quattro operazioni** – somma, sottrazione, prodotto, divisione – introdotte in **N** inducono a cercare insiemi numerici più ampi.

Ci sono vistose limitazioni:

1 – la **sottrazione** m-n si può eseguire solo con minuendo m non inferiore al sottraendo n ($m \geq n$)

2 – la **divisione** m:n fornisce un risultato intero se e solo se il dividendo m è multiplo del divisore n ($m=kn$)

Gli interi relativi

Quando la colonnina del termometro passa da + 5 gradi a – 2 gradi si comprende che la temperatura é scesa di 7 gradi; ….potremmo dire che $+5-7=-2$

… abbiamo forse ovviato alla limitazione presentata dalla sottrazione in N?

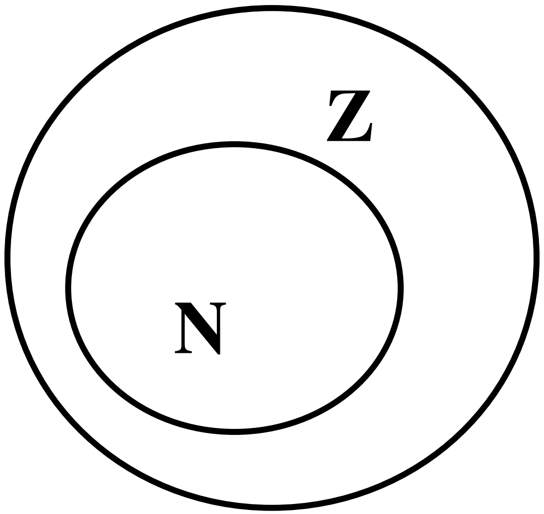
Di fatto il matematico non è mai così sbrigativo, ma associando ai numeri interi un segno **+** o **–** nasce il nuovo insieme con numeri negativi, $-n$, e positivi, $+n$.

Z é **infinito, ordinato e illimitato inferiormente e superiormente**

. . . –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 . . . .

- Si introducono le quattro operazioni con le adeguate *regole dei segni*
- I numeri relativi non negativi si possono identificare con i naturali; i negativi *allargano* l'insieme
- Le quattro operazioni conservano le proprietà che avevano in **N**, **non ci sono più limitazioni nella sottrazione.**

Z è numerabile?



- **Z** contiene propriamente **N**
- **Z** e **N** si possono porre in corrispondenza biunivoca?
- gli elementi di **Z** si ordinano in una successione
- **Z** è **numerabile**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. . .
Z	0	–1	+1	–2	+2	–3	+3	–4	+4	–5	+5	+6	. . .

I numeri razionali

In **Z** rimane il problema della divisione: il quoziente di due numeri non è sempre un numero intero relativo!

Per ampliare ulteriormente l’insieme:

- **Coppie ordinate** di interi relativi (m,n) ove $n \neq 0$
- Adeguata **legge di composizione**
- **Relazione di equivalenza**

… nascono i **numeri razionali Q**

I numeri razionali

- La **coppia (m,n)** non é altro che l'abituale frazione m/n = $\dfrac{m}{n}$
- Gli interi m ed n potrebbero avere un divisore comune, diverso da 1, quindi uno stesso numero può essere rappresentato da **coppie equivalenti**

$$\frac{m}{n} \cong \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad mq = np$$

- Coppie equivalenti formano la **classe di equivalenza**; ogni numero razionale è associato ad una classe ed ogni elemento della classe può rappresentare il numero
- Scegliendo coppie (m,n) con $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$ ed $m \in \mathbf{Z}$, il segno del numero razionale rimane legato al numeratore

Numeri e punti di una retta

I **numeri razionali** si possono far corrispondere **a punti di una retta** sulla quale è stato introdotto un riferimento cartesiano

I numeri razionali **esauriscono** i punti della retta**?**

I punti di tale retta sono **tutti legati** ad un **numero razionale?**

Ci sono **punti** sulla retta, individuabili con costruzione geometrica, che **non sono individuabili con un numero razionale**: ad esempio per mezzo della diagonale del quadrato di lato unitario o della diagonale di un rettangolo di lati 1 e 2.

Applicando semplicemente il **Teorema di Pitagora**, nei due casi si ottiene rispettivamente $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$

Numeri e punti di una retta

- I numeri razionali **non** esauriscono i punti della retta
- lasciano ***tanti punti inframmezzati*** dalle immagini dei razionali stessi
- **L'insieme Q, che amplia Z, non** ha una **diversa *potenza*: è numerabile!**

0/1	-1/1	1/1	-2/1	2/1	-3/1	3/1	-4/1	4/1	-5/1	5/1	-6/1	6/1……..
0/2	-1/2	1/2	-2/2	2/2	-3/2	3/2	-4/2	4/2	-5/2	5/2	-6/2	6/2……..
0/3	-1/3	1/3	-2/3	2/3	-3/3	3/3	-4/3	4/3	-5/3	5/3	-6/3	6/3……..
0/4	-1/4	1/4	-2/4	2/4	-3/4	3/4	-4/4	4/4	-5/4	5/4	-6/4	6/4……..
0/5	-1/5	1/5	-2/5	2/5	-3/5	3/5	-4/5	4/5	-5/5	5/5	-6/5	6/5……..
0/6	-1/6	1/6	-2/6	2/6	-3/6	3/6	-4/6	4/6	-5/6	5/6	-6/6	6/6……..

…………………………………………………………………

……………………………………………………………….

0 -1 1 -1/2 -2 ½ -1/3 2 1/3 -1/4 -3 2/3 ………

Altro riordino dei numeri razionali

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	…
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	…
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	…
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	…
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	…
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	…
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	…
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

NB: Partire dalla tabella dei razionali positivi.
I numeri

scritti in rosso

sono quelli già presenti nella sequenza, quindi **da omettere.**

Completare con lo zero e i negativi.

1 2 1/2 1/3 3 4 3/2 2/3 1/4 1/5 5 6 5/2 4/3 3/4 ……..

0 1 -1 2 -2 1/2 - ½ 1/3 - 1/3 3 -3 4 -4 3/2 - 3/2 2/3 - 2/3 1/4 -1/4….

Numeri reali

R. Dedekind
1831 -1916

- Occorre **ampliare l'insieme dei numeri razionali** per rimuovere il **problema della misura** delle grandezze, fissata un unità di misura.
- Alcuni punti della retta corrispondono ad estremi di **segmenti incommensurabili** rispetto all'unità di misura fissata.
- **Postulato di completezza** dei punti di una retta
- **Numeri reali come sezione dei numeri razionali**

Numeri reali

"Dedekind's brilliant idea was to represent the **real numbers** by divisions of the rationals"

Q numeri razionali **divisi** in due classi **(A,B)**, dette **sezioni di Q**, tali che :

- **Q** = **A**$\cup$**B**
- ogni $a \in$ **A** è minore di ogni $b \in$ B
- **A** può avere elemento massimo a^*, oppure **B** avere elemento minimo b^* (di solito si sposta b^* in **A**)
- **leggi di composizione** somma e prodotto

...nascono i numeri reali **R**

I numeri reali

La collezione di tutte le possibili sezione dei razionali, costituisce **R**:

- (A,B) con *a* max in A , rappresenta il **numero reale razionale** *a*
- (A,B) senza max in A, definisce un *elemento nuovo*, il **numero reale irrazionale**
- **R** non è numerabile
- **R** è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta: **potenza del continuo**

R non numerabile

- **equipotenza** di **R** e dei punti del segmento [-1,1]

  - realizzazione di una corrispondenza biunivoca

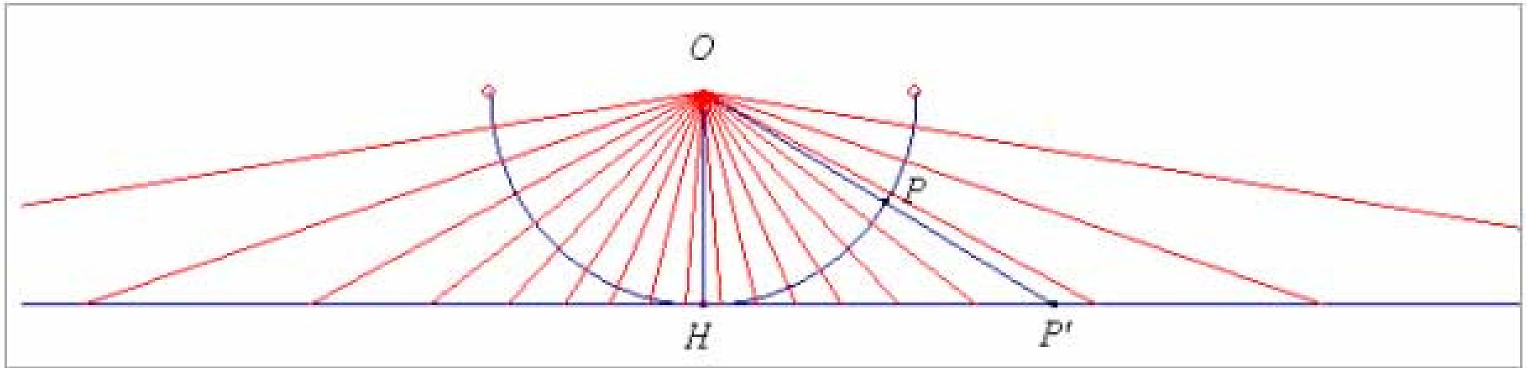
- **non numerabilità** di **R**

  - si considerano tutti i numeri compresi tra 0 e 1, scritti in base decimale

  - si suppone siano ordinabili in una successione

  - si mostra che sempre se ne trascura almeno uno

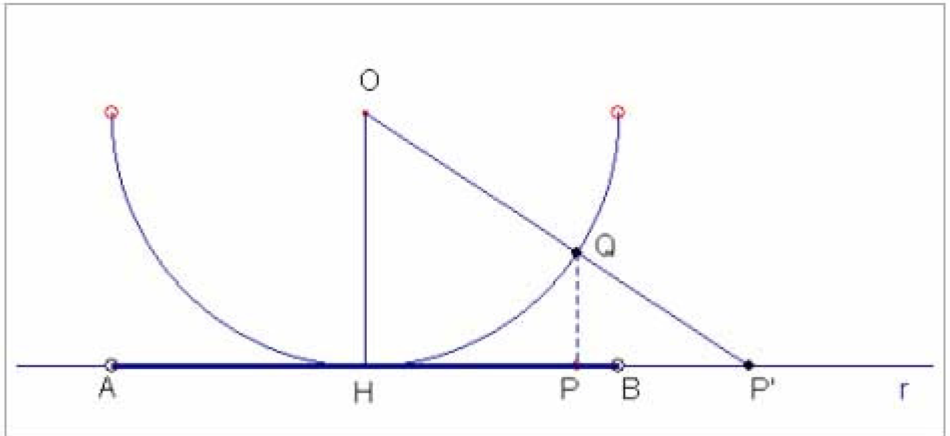
Corrispondenza biunivoca segmento - retta



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

Con queste corrispondenze si comprende che **la numerosità dei punti di una retta** è la stessa **dei punti di un segmento.**

E' quella dei **numeri reali**, che sono **infiniti non numerabili**.



Corrispondenza biunivoca tra il segmento AB e la retta r.

I numeri primi sono infiniti?

Euclide e l'infinità dei numeri primi: un esempio di infinito potenziale (in *Gli Elementi*, Libro IX, proposizione 20):

Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti se ne voglia proporre.

Una possibile dimostrazione:

"Siano *a*, *b*, *c* i numeri primi proposti.Dico che esistono numeri primi in maggior numero dei soli tre *a, b, c*."

Dimostriamo allora che esiste un quarto numero primo. Si consideri il numero intero $d=abc+1$; questo numero *d* non è divisibile per *a*, per *b* e per *c*. Se *d* è primo allora abbiamo dimostrato l'esistenza di un quarto numero primo.

Se *d* non è primo esso ammette un divisore che è primo; chiamiamo questo numero *h*. Dimostriamo che *h* è diverso da *a*, *b* e *c*.

Se, infatti, il numero h fosse uguale ad uno dei tre numeri *a, b, c*, esso dividerebbe il prodotto *abc*. Ma si è supposto che il numero *h* divida anche $d=abc+1$, quindi *d* dividerebbe anche la differenza tra ($d=abc+1$) e *abc*, ossia l'unità, da cui l'assurdo.

Euclide conclude:

"Si sono trovati numeri primi, cioè *a, b, c, d*, più numerosi di quanti numeri si siano proposti all'inizio, cioè *a, b, c*. Come dovevasi dimostrare".

La dimostrazione è notevole e andrebbe letta, così si leggono opere di poeti. Euclide non nomina mai la parola "infinito", ma evoca l'infinità dei numeri primi in senso potenziale.

Rappresentazioni in base m

- Rappresentazione binaria (due sole cifre: 0, 1)
- Rappresentazione in base m intero naturale qualsiasi (m cifre 0, 1, 2 …, m-1)

$(2679)_{10} = 9\ 10^0 + 7\ 10^1 + 6\ 10^2 + 2\ 10^3$

$(abcd)_m = d\ m^0 + c\ m^1 + b\ m^2 + a\ m^3$

$0 \leq a,b,c,\ d < m$

Pensando alla base 10, i **razionali** hanno tutti una rappresentazione con un numero finito o periodico di cifre dopo la virgola; gli **irrazionali** dopo la virgola hanno sempre infinite cifre non periodiche

Indirizzi

www.polimi.it

www.poliorientami.polimi.it

www.mate.polimi.it

http://fds.mate.polimi.it

Luisa.rossi@polimi.it